

# ПЛАН УЧЕБНОГО ЗАНЯТИЯ

по дисциплине «Математика»

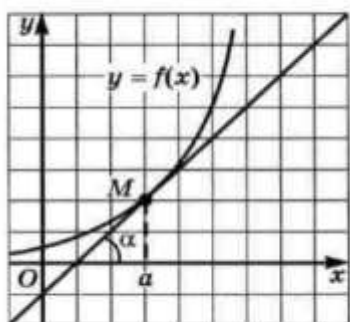
дата 28.11.2023

Тема: «Геометрический смысл производной. Уравнение касательной к графику функции. Физический смысл производной»

Новый материал (конспект в тетрадь)

## 1. Геометрический смысл производной

Производная функции  $y=f(x)$ , вычисленная при заданном значении  $x_0$ , равна тангенсу угла, образованного положительным направлением оси Ох и касательной, проведенной к графику этой функции в точке с абсциссой  $x_0$ :  $\operatorname{tg} \alpha = f'(x_0)$



**Замечание**

Геометрически производная представляет собой угловой коэффициент касательной ( $k$ ) к графику функции  $y=f(x)$  в точке  $x_0$ .

Любая касательная является функцией линейной и имеет вид  $y=kx+b$ , где  $k$  — угловой коэффициент касательной.

Значит, справедлива формула

$$\operatorname{tg} \alpha = f'(x_0) = k$$

## 2. Уравнение касательной

Уравнение касательной к графику функции  $y=f(x)$  в точке с абсциссой  $x_0$  имеет вид

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Алгоритм составления уравнения касательной

1. Вычислить  $f(x_0)$
2. Найти  $f'(x)$  и вычислить  $f'(x_0)$
3. Подставить найденные числа  $x_0$ ,  $f(x_0)$  и  $f'(x_0)$  в формулу  $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

**Пример:** Дана функция  $y=x^3$ . Составить уравнение касательной к графику этой функции в точке  $x_0=2$ .

1. Для начала найдем значение функции:  $f(x_0) = f(2) = 2^3 = 8$ ;
2. Теперь найдем производную:  $f'(x) = (x^3)' = 3x^2$ ;

Подставляем в производную  $x_0 = 2$ :  $f'(x_0) = f'(2) = 3 \cdot 2^2 = 12$ ;

3. Подставим найденные числа в формулу:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$y = 12 \cdot (x - 2) + 8$$

$$y = 12x - 24 + 8$$

$$y = 12x - 16.$$

Это и есть уравнение касательной.

**Пример:** Написать уравнение касательной к графику функции  $f(x) = \cos x$  в точке

абсциссой  $x_0 = \frac{\pi}{6}$ .

Решение:

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$f'(x) = (\cos x)' = -\sin x$$

$$f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$

$$y = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \text{ - искомое уравнение касательной}$$

### 3. Физический смысл производной

**Физический смысл производной** заключается в том, что производная выражает скорость протекания процесса, описываемого зависимостью  $y = f(x)$ :

- если это движение автомобиля, то, принимая в качестве функции зависимость пройденного расстояния от времени, с помощью производной получается зависимость скорости от времени;

- если же рассмотреть в качестве функции мгновенную скорость автомобиля, то производная задает изменение его ускорения;

- если рассмотреть функцию, задающую зависимость объема произведенной продукции от времени, то производная позволит узнать, как изменялась со временем производительность труда на этом предприятии;

- если рассматриваются электромагнитные волны, то могут потребоваться функции, характеризующие изменение со временем электрического и магнитного полей, а также их производные - скорости изменения этих полей, ведь величина магнитного поля пропорциональна скорости изменения электрического поля и т.п.

Скорость прямолинейного движения материальной точки в момент времени  $t$  есть производная от пути  $S$  по времени  $t$ :

$$v(t) = S'(t),$$

а ускорение – производная скорости по времени:

$$a(t) = v'(t)$$

*Если функция  $y = f(x)$  описывает какой-либо физический процесс, то производная  $y'$  есть скорость протекания этого процесса. В этом заключается механический смысл производной.*

**Примеры:**

1. Закон движения тела задан формулой  $S(t) = 0,5t^2 + 3t + 2$  ( $S$  - в метрах,  $t$  - в секундах). Какой путь пройден телом за 4 секунды? Какова скорость движения в этот момент времени?

Решение:

$$S(4) = 0,5 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4 + 2 = 8 + 12 + 2 = 22 \text{ (м)}$$

$$v(t) = (0,5t^2 + 3t + 2)' = t + 3 \text{ (м/с)}$$

$$v(4) = 4 + 3 = \underline{7 \text{ (м/с)}}$$

Ответ: 7 м/с

2. Пусть количество вещества, вступившего в химическую реакцию, задаётся зависимостью  $p(t) = t^2/2 + 3t - 3$  (моль). Найти скорость химической реакции через 3 секунды.

Решение:

$$v(t) = p'(t) = t + 3 \text{ (моль/с)}$$

$$v(3) = 3 + 3 = \underline{6 \text{ (моль/с)}}$$

Ответ: 6 моль/с

**Домашнее задание**

Проработать конспект по тетради

Конспект отправляем на электронную почту [oles.udalova@yandex.ru](mailto:oles.udalova@yandex.ru)